

[算数・数学]

活用する力を育む授業づくり

－中学校2年「文字式による説明」の実践を通して－

疋田 克彦*

1 問題の所在

新学習指導要領の数学科の目標には、「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力（「知識及び技能」「思考力、判断力、表現力等」「学びに向かう力、人間性等」）を育成することを目指す」とある。私自身、これまでの授業において知識・技能の確実な習得と、それを活用した探究的な授業を実践することで思考力・判断力・表現力を育むことを目指してきた。当校の様子を見ても、知識・技能の定着を図る新潟県Web配信システムや学校で行う各種テストの結果については概ね良好であった。しかし、その反面、文章題や論証問題等の発展的な課題については、対応できる生徒が少ないと感じていた。つまり、身に付けた知識・技能を具体的な問題場面に関連付けて活用できていない実態があると言える。

相馬（2008）は、分離論（一つ一つの授業を習得と活用で分けて行う授業）や段階論（習得させてから活用させる授業）に基づく「型にはまった、形式的な授業」にならないようにするため、「習得」と「活用」をバランスよく、同時に組み込んでいく授業として「活用させながら習得させる授業」を提案している。また、「活用させながら習得させる授業」は「問題解決的な授業」を通して実現されることを示唆している。

この点について自身の授業を顧みると、分離論や段階論のような授業が多かったように思える。既習内容を活用しながら問題解決を進められるようにするためにも、「活用させながら習得させる授業」を構想していく必要がある。

また、身に付けた知識・技能を活用して問題解決を図るためには、生徒の主体的な学びが必要不可欠となる。そして、その支えとなるのが生徒の学習意欲の向上であり、そのための手立てを講じていく必要性を強く感じている。

松沢（2010）は、学力の3要素の1つである「学習意欲」が国際的には極めて低位であるという実態を課題とし、その解決を教材開発に求めた研究を行っている。学習意欲の向上に有効であった教材を分析した結果、これらの教材には「よさ・美しさ」「多様性」「不思議さ」「一般化」「発展性」「発見」「考えること」の7つのキーワードが潜んでいることを明らかにしている。

相馬（1993）は、授業で「予想」を重視することには、「学習意欲を高める」「考え方の追求を促す」「思考の幅を広げる」という意義があることを指摘している。さらにそのためには「異なる予想」が生じることが望ましいとも述べている。

山本（2006）は、生徒一人一人が主体的に学べるようにしたいという問題意識から、生徒相互のコミュニケーションに焦点をあてた研究を行っている。山本はその一事例として文字式の授業を取り上げている。そこでは生徒同士が考えを交流する機会を設定したことで、文字式の理解が不十分で文字式を1つの値として捉えられず誤答($8a+180=188a$)した生徒が、正しい表現の仕方に気づき理解を深めた様相を報告している。

以上から、生徒の学習意欲を高めるための手立てとして、課題の設定が重要であると考ええる。生徒の興味・関心を高めるため、課題に様々な要素や予想を取り入れていく。その際、生徒間の予想にずれが生じたり、生徒の感覚と実際の事象との間にずれが生じたりする課題を提示することで、生徒の「分きたい」「知りたい」「解決したい」等という思いをより一層高めることができると考える。そのような課題を設定することで、生徒が主体的に課題に取り組む姿や、他と協働して課題を解決する姿が見られると推察する。また、既習内容を活用して課題解決できた経験を積み重ねることで、その有用性が実感でき、学ぶことの意義が高まると考える。

上述したことから、自身の課題としては、生徒が身に付けた知識・技能を活用して課題解決をすることが難しいという現状がある。このような姿が顕著に見られた学習場面の一つとして、「文字式による説明」がある。

*十日町市立下条中学校

その解決のための手立てとして、「課題設定の工夫」「文字式のよさの実感」「生徒同士の考えの交流場面の設定」の3点を考える。

これらの手立てを講じて、授業を構想・実践し、その有効性を検証することとする。

2 研究の目的

本研究は、「文字式による説明」の学習場面において、生徒が主体的に知識・技能を活用して課題解決を図るために、どのような手立てが有効か明らかにすることを目的とする。

3 研究の内容と方法

本研究は、中学校2年生1クラス（男子10名、女子10名、計20名）の「文字式による説明」の学習を対象としたものである。

(1) 内容

① 「活用する力」について

「活用する力」とは、身に付けた数学的な知識・技能を用いて、自ら考え、判断し、表現しながら解決する力と捉えている。つまり、既習内容を活用して課題解決をする学習活動を取り入れた、問題解決型の授業を実践していくことが重要となる。

私の既習内容についての捉えは、単元固有の内容と複数の単元で用いられる内容の2つがあると考え。そして、その違いを意識して指導する必要がある。本実践の「文字式による説明」であれば、前者は文字式の計算・表現・読式、後者は図・表等がそれにあたる。

これまでの学習においては、数量の関係を把握する力を高めるために、その手立てとして図や表をかかせることを指導してきた。また、方程式の解法では、「式の値の考え」を用いて解を求める等、単元間の接続も行ってきた。これらのことから、既習内容の活用とは、数学的な考え方の活用と考える。

本実践においても、既習内容を活用して課題解決に取り組ませたい。問題場면을具体的な数で考察することで予想を立て、その予想が成り立つことを文字式を用いて説明していくことで、「活用する力」を育んでいきたい。

② 「活用する力」を育むための手立て

ア 課題設定の工夫

生徒の学習意欲を高めるために、本実践の課題には、「不思議さ」や「一般化」、「発展性」の要素を取り入れる。また、生徒に結果を予想させる際、生徒の感覚と実際の事象との間にずれが生じるようにする。このような課題を提示することで、生徒が明確な問題意識をもった上で、文字式による説明に取り組めると考える。

具体的には、中心課題として「半径 r m の球体の周りに、球体より 1 m 離してロープを張る。ロープの長さは球体の円周の長さより何 m 長いのか？」を設定する。生徒の感覚では球体が大きくなればなるほど、その差が大きくなると捉えている生徒が多くいると考えられる。しかし、実際に計算してみると球体の大きさに関係なく常に $2\pi m$ (約 6.28m) になる。このことで生徒の中で疑問が生じ、課題に対する興味・関心が高まると推察される。この疑問を解消するため、文字式を用いた説明の必要性を感じさせたい。

その後、原題の図形を円から正方形へと条件変更することで、生徒の課題追究意欲が更に高まることを期待する。

なお、課題提示にあたっては、生徒の課題把握を促すために、パワーポイントを用いて視覚的に捉えやすくなるように支援する。

イ 文字式のよさの実感

起きている事象が成り立つことは、文字式を用いることで解明できる。このように自身の考えを一般化し、問題解決できたという経験を積むことで、生徒は文字式を用いて説明することの意義が実感できると考える。また、与えられた問題場면을文字式に表すことができれば、あとは形式的に処理していけば解答が求められるという文字式のよさを味わうことで、文字の有用性も感じるができることと考える。

ウ 生徒同士の考えの交流場面の設定

「ロープの長さは正方形の土地の周りの長さよりもなぜ 8 m 長いのか？」と発問し、図と文字式の計算結果を結び付けて説明する場面を設定する。説明の際、図に考えを描き込む生徒、その図をもとに言葉で説明する生徒と、複数の生

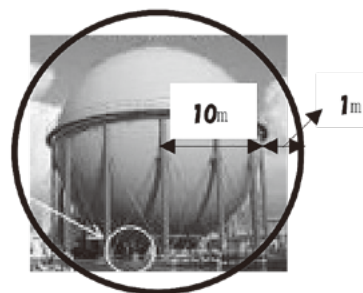
徒に発表させることで生徒がより伝わる発表を心掛けたり、聞いている生徒も様々な生徒の説明から理解を深めようとしたりすると考える。このように生徒同士が考えを交流させることで、数学的な見方・考え方の広がりや深まりが期待できる。

③ 授業の構想

題材名：「ロープの長さは何m長い？」

課題 1

半径10mのガスタンクの周りに、ガスタンクより1m離してロープを張る。ロープの長さはガスタンクの円周の長さより何m長いでしょうか？



- ロープの長さとガスタンクの円周の長さとの差を求める。

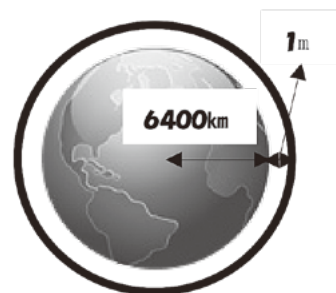
$$\begin{aligned} & \cdot 11 \times 2 \times \pi - 10 \times 2 \times \pi \\ & = 22\pi - 20\pi = 2\pi \text{ m} \end{aligned}$$

- およその長さを求める。

$$\cdot 2\pi = 2 \times 3.14 = \text{約} 6.28 \text{ m}$$

課題 2

半径6400kmの地球の周りに、地球より1m離してロープを張る。ロープの長さは地球の円周の長さより何m長いでしょうか？



- 地球の半径の長さがガスタンクの半径の長さ比べて、640000倍になることを確認した上で、ロープの長さと円周の長さとの差を予想する。

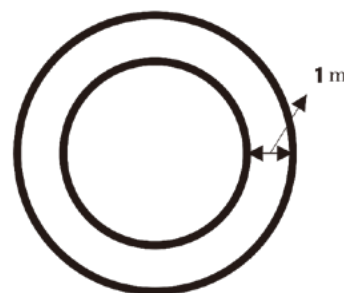
- ロープの長さと地球の円周の長さとの差を求める。

$$\begin{aligned} & \cdot 6400001 \times 2 \times \pi - 6400000 \times 2 \times \pi \\ & = 12800002\pi - 12800000\pi = 2\pi \text{ m} \end{aligned}$$

- 予想として、どんな円でもロープの長さと円周の長さとの差は「 2π 」になることを確認する。

課題 3 (中心課題)

どんな円でも1m離してロープを張ると、ロープの長さと円の円周の長さとの差は $2\pi \text{ m}$ (約6.28m)になるのか？

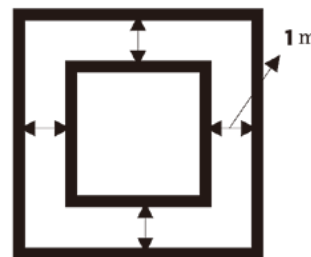


- 文字式を用いて説明する。

$$\begin{aligned} & \cdot (r+1) \times 2 \times \pi - r \times 2 \times \pi \\ & = 2\pi r + 2\pi - 2\pi r \\ & = 2\pi \text{ m} \end{aligned}$$

課題 4 (発展課題)

正方形の土地の周りに、正方形の土地より1m離してロープを張る。ロープの長さは正方形の土地の周りの長さより何m長いでしょうか？



- 長さの関係を文字式や図に表して説明する。

$$\begin{aligned} & \cdot \text{正方形の1辺の長さを } x \text{ m とすると,} \\ & 4(x+2) - 4x = 4x + 8 - 4x = 8 \text{ m} \\ & \cdot 4 \text{ 隅でそれぞれ } 2 \text{ m の差があるため, } 2 \times 4 = 8 \text{ m} \end{aligned}$$

- 全体の前で代表生徒が自身の考えを発表する。

(2) 方法

上述した手立てを講じた授業を実践する。具体的な問題場面を一般化する過程において、講じた手立てが有効であったか、生徒のワークシートの記述内容や発話記録、学習活動の様子を分析することで明らかにしていく。

4 授業の実際と考察

(1) 授業の実際

① 「課題設定の工夫」に関する場面

課題2を提示した場面での授業者と生徒とのやり取りは、以下の通りである。

課題1でガスタンクの円周の長さとしてロープの長さとの差が $2\pi\text{m}$ になることを確認した後、授業者が「これを別のものと考えたいと思います。何を使うかという、地球です。」と話すと、生徒からは「えっ、地球。」「えー」「規模が大きい。」等の反応があった。

授業者が地球の半径は $6400\text{km}=6400000\text{m}$ であり、ガスタンクの半径の640000倍になることを全体で確認した。

T : ということはみんなどうなると思う。C1さんどうなると思う。さっきのに比べて。

C1 : 大きくなる。

T : 大きくなる。どのくらい大きくなると思う？

C1 : えっ、640000倍。

T : あー、640000倍大きくなると思う。(C1は頷く) 長さがね。差がそのくらいになるということね。C2はどう思う？

C2 : でかくなると思う。

T : でかくなるね。でかくなるなと思う人、どのくらいいる。



図1 差が長くなると予想した生徒の様子

18名の生徒(2名の生徒が欠席)中、13名の生徒が手を挙げて、差が長くなると予想した。(図1) 生徒の中には、「同じじゃないですか。」とつぶやく生徒もいた。

授業者が実際に計算するように指示すると、計算を終えた生徒の中で次のようなやり取りをする生徒がいた。

C3 : 2π 。

C4 : 2π 。同じになった。何でだろう。

C3 : 分かんない。

全体でも地球の円周の長さとしてロープの長さとの差が $2\pi\text{m}$ になることを確認した。その後、他の様々な円や球(大玉、時計等)を提示し、同じように1m離すという条件でやってみるとどうなるか問いかけると、生徒は声をそろえて「 2π 」と答えた。そこで授業者から「本当にロープの長さが一定になることを今日は説明してもらいたと思います。必ずどんな円でも1m離れたら差は 6.28m だということを、 2π だということを説明してください。」と問いかけ、文字式による説明につなげた。

② 「文字式のよさの実感」に関する場面

課題3の問題場面を文字で表現する場面では、次のようなやり取りが授業者と生徒との間でなされた。

T : C5さん、今、何が困るの？この問題で。

C5 : 半径が分からない。

T : うん。さっきまでは 10m とか、ね、 6400000m というふうに半径の長さが分かっていたんだけど、今、これは半径の長さが分からないよね。どうすればいいの、半径？

(生徒から「文字。」「文字にする。」等の反応があった。)

T : 文字を使う。どんな場合でもということは、半径に文字を使えばいいということね。

このやり取りの中で円の半径を $x\text{m}$ に設定し、各自で文字式による説明を完成させた。図2のように書いた生徒を指名し、全体の前で発表をもらった。(図2のワークシートでは、途中式で「 $2x + 2\pi$ 」と π を書き忘れているが、黒板では正しく表記して説明した。)

その後、授業者が補足説明として、文字式の部分を取り上げ「ここが打ち消し合って、結局 2π しか残らないのね。つまり x が残らないでしょ。 x が残らないということは、半径は影響しないということ。だから大きさが変わっても半径は影響しないということだね。」とまとめた。

この問題解決の場面で、問題場面を文字式で表現する際、「 $x + 1$ は x に

半径 $x\text{m}$

【説明】 1つの円の半径を $x\text{m}$ とね

元の円の円周 $x \times 2 \times \pi = 2\pi x$

ロープの長さ $2(x+1) \times \pi = 2\pi x + 2\pi$

差 $2\pi x + 2\pi - 2\pi x = 2\pi$

図2 代表生徒のワークシート

なるの？」と発する生徒や、黒板に書かれた文字式による説明を見て「あれ、違う。」「分かんない。」とつぶやき、答えを書き直す生徒の姿が見られた。

課題4の場面では、ロープの1辺の長さを $(x+1)m$ としたり、「 $2x$ 。」とつぶやいたりする生徒が見られたため、正方形の1辺の長さを xm としたとき、ロープの1辺の長さが $(x+2)m$ になることを全体で確認した。

この学習場面において、生徒同士で図を指して「縦で考えると1mが上に1、下に1だからプラス2だと思う。」「そうだね。」と相談しながら問題場面を文字式で表現する様子が見られた。その一方で、全体で $(x+2)m$ になることを確認した後も、「何でなの？」と発する生徒がおり、それに対して「だから角が1mずつあまるじゃん。1個ずつあまるじゃん。」と別の生徒が説明するが、首を傾げて納得できない様子を見せる生徒もいた。そのため、授業者が図に描いて説明すると、その生徒も理解を示した。

その後、図3のようにワークシートを完成させた生徒から代表として全体の前で発表してもらった。

③ 「生徒同士の考えの交流」に関する場面

課題4の文字式による説明を全体で確認した場面で、授業者が「何で8mになるか分かる？何の8か分かる？」と問いかけると、「角の」とつぶやいた生徒がいたため、その生徒から黒板の図に考えを描き込んでもらった。(図4)

その図について、次のように別の2人の生徒が説明した。

C6: (引いた線をすべて指して)これが1mとして、これを外に広げるとこの形(ロープの正方形をなぞって)になるから、だから8m。

C7: (角に引いた線を指して)1m分延びるのが横にも縦にも、4つ分の角。両方、縦にも、横にも延びているから、この延びている分が(引いた線をすべて指して)1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8。8個分だから8mになる。

その後、授業者が正方形の1辺の長さが、ロープの正方形の1辺の長さのどの部分と重なるか示し、2人の説明を補った。

(2) 考察

① 「課題設定の工夫」について

課題1と課題2の場面では、多くの生徒が円を大きくすれば、ロープの長さと円周の長さとの差も長くなると感覚的に予想していた。しかし、実際に計算してみるとどちらも同じ $2\pi m$ になったため、生徒は驚きを感じるとともに、そこに疑問が生まれたと考えられる。それはワークシートの感想に「ロープの長さが常に一定ということはありえないと思っていたのでびっくりしました。」「大きさが変わっても、ロープとの差が同じになって面白かった。」「説明したら本当に 2π になったので、もっとびっくりした。」「思っていたのと違う結果になっておもしろかった。」等の記述があったことから推察される。また発展課題についても、ワークシートの感想に「他の図形はどうなっているか調べたい。」「正方形も球も決まった答えがあるということは、台形とかもあるのか気になった。」の記述があったことから、生徒の中に新たな疑問が生じた様子が伺える。

以上から、課題に「不思議さ」や「発展性」といった要素を取り入れたり、生徒の感覚と実際の事象との間にずれが生じたりする課題を設定することは、生徒の学習意欲を高める上で有効であると考えられる。

② 「文字式のよさの実感」について

文字式を用いるよさについて、生徒はどんな場面でも成り立つことを説明する手段として、文字の必要性を確認できたと推察される。それはワークシートの感想に「文字式で計算すると、どんなことでも解ける気がしました。難しいときは文字を使ってみようかなと思いました。」「文字式は様々な場面で活用できることを知った。」「難しそうな問題でも文字を使うと分かりやすく説明できることが分かりました。」「ガスタンクと地球の問題は、文字を使わなかったので少し計算が大変でした。でも、文字を使うと簡単に計算できるので文字があると便利だと思いました。」といった記述があったことから、文字式のよさを実感できたと推察される。

以上から、生徒が自身の予想を文字式で説明できたことは、文字式を用いることのよさを実感することにつながった

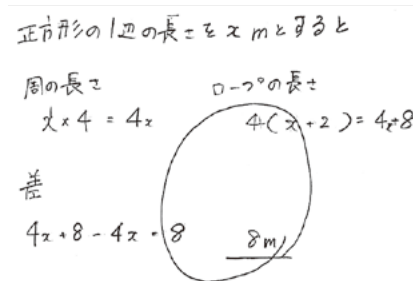


図3 代表生徒のワークシート

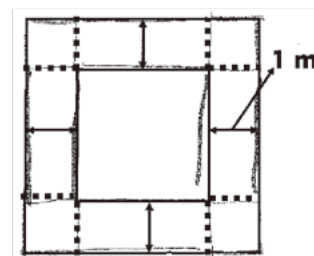


図4 生徒が描き込んだ図
(見えにくかったため、筆者が点線で補足)

と考えられる。

ただ、ワークシートの感想に「文字式を用いたやつは、 x をどこに入ればいいのか分からなくて難しかった。」「文字に置き換えると計算が分からなくなる時があるので繰り返し解いていきたいです。」といった記述が見られたり、授業の中で問題場面を文字式で表現することに困難を感じている生徒がいたりしたことから、生徒のつまづきを取り上げ、学び直しの機会を設けていく必要があると考えられる。

③ 「生徒同士の考えの交流場面の設定」について

課題4の場面では、計算結果が8mになる理由を、一人の生徒に説明させるのではなく、図に補助線を引く生徒、その図をもとに言葉で説明する生徒と、複数の生徒に全体の前で発表させた。生徒は様々な表現での説明を聞くことで理解が深まったと推察される。それはワークシートの感想に「なぜ8になるのかというのを考えて、友だちに教えてもらい理解できました。」「C6やC7もすごく分かりやすく説明して理解できました。」という記述があったことから伺える。

また、数学が苦手な生徒も代表生徒の発表を聞きながら聞き、ワークシートの感想には「1mのばすと角が2つずつのびていて4辺あるから8になる。」と書き、その理由を説明していた。

以上から、生徒同士の考えの交流場面を設定することは、生徒の理解をより一層深めることができると考えられる。

5 成果と今後の課題

本研究では、活用する力を育むための手立てとして、「課題設定の工夫」「文字式のよさの実感」「生徒同士の考えの交流場面の設定」を授業に仕組み、一定の成果が見られた。

「課題設定の工夫」では、生徒の学習意欲を高めることで、身に付けた知識・技能を具体的な問題場面に結び付けて解決しようとする姿勢が見られた。「生徒同士の考えの交流場面の設定」では、他の生徒の説明を聞くことで問題場面と計算結果の意味を関連付けて考える生徒の様子が見られた。

しかし、その反面、「文字式のよさの実感」については、問題場面を正確に文字式で表現したり、計算したりすることが難しい生徒の様子が見られた。その点に関連して、ワークシートの感想に「円の周りの長さとロープの長さはどこが $2\pi m$ (6.28m) 長いのかよく分からなかったけど、正方形は4つの角の周りのところが長いということがハッキリと目で見て分かりました。」「分からないときは、実際に図を描くと分かりやすくなった。」という記述があった。また、課題4においては、図をもとに文字式について考えることで正しい表現が理解できた生徒の様子も伺えた。

以上から、問題場面と文字式とが結び付くと生徒の理解がより深まると推察される。文字式を用いることに不慣れな段階では、形式的な計算で終わらせるのではなく、できるだけ問題場面と文字式とを結び付けて、文字式の意味を考えさせることも必要であると考えられる。

今後、文字式と図を結び付けることで、どのような生徒の理解の変容が見られるか検証していきたい。

引用文献

文部科学省「中学校学習指導要領（平成29年告示）解説 数学編」，日本文教出版，2018年

相馬一彦「考える力と知識・技能を『バランスよく、同時に』－『活用させながら習得させる授業』を－」日本数学教育学会誌，90(5)，2008年，23～28pp

松沢要一「学習意欲を高める算数・数学の教材開発－教材に具備させたい7つのキーワード－」臨床教科教育学会誌，2010年，10(1)，67～74pp

相馬一彦「数学教育における『予想』の意義」日本数学教育学会第26回数学教育論文発表会文集，1993年，193～198pp

山本晋平「子どもが主体的に取り組むことのできる一斉授業・習熟別少人数授業の在り方」平成17年度中津川市教育実践研究論文集，1～10pp

参考文献

疋田克彦「文字式利用の表現過程に焦点をあてた論証の授業改善に関する研究」上越数学教育研究，30，63～72pp